Übungsblatt 3

Wachstum, Verteilung, Nachhaltigkeit WS 2026/27

Prof. Melanie Krause, Ph.D.

Dieses Übungsblatt wird am Dienstag, den 17. November 2026, besprochen.

1. Die Produktionsfunktion eines Landes sei durch $Y_t = K_t^{0.6}(A_t L_t)^{0.4}$ gegeben. Im Jahr 2025 beobachten wir folgende Werte:

$$K_t = 10000; \quad L_t = 100; \quad Y_t = 10000 \tag{1}$$

   Außerdem sei bekannt, dass der Gesamtoutput Y_t von 2025 bis 2026 um 2.5% gewachsen ist, der Kapitalstock K_t um 1% und die (Erwerbs-)Bevölkerung L_t ebenfalls um 1%. Was war die Rate des technologischen Fortschritts zwischen 2025 und 2026? Was ist das Technologieniveau A_t im Jahr 2026?

2. Nehmen Sie an, dass das Pro-Kopf-Einkommen in einem Land im Jahr 2025 den Wert 15000 USD hatte. Die Sparquote betrug 20%, die Bevölkerungswachstumsrate 2%, die Abschreibungsrate des Kapitalstocks 3%, die Rate des technologischen Fortschritts 3% und die Cobb-Douglas Produktionsfunktion war

$$Y_t = K_t^{\alpha} \cdot (A_t \cdot L_t)^{1-\alpha} \tag{2}$$

   mit $\alpha = 0.35$. Das Kapital pro effektivem Arbeiter $\tilde{k} = \frac{K}{A \cdot L}$ folgt der Veränderungsgleichung $\dot{\tilde{k}} = s(\tilde{k})^{\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}$. Das Land befindet sich auf dem ausgewogenen Wachstumspfad.

   (a) Was ist gemäß des Solow-Modells der Steady State des Kapitals pro effektivem Arbeiter und des Einkommens pro effektivem Arbeiter? Wie hoch war das Technologieniveau des Landes im Jahr 2025?

   (b) Angenommen, das Land bliebe auf dem ausgewogenen Wachstumspfad, was ist dann das Steady State Niveau des Kapitals pro effektivem Arbeiter im Jahr 2025? Was ist das Pro-Kopf-Einkommen im Jahr 2026? Um wieviel sind das Pro-Kopf-Einkommen und das Gesamteinkommen zwischen 2025 und 2026 gestiegen?

   (c) Welche Auswirkungen hätte eine Erhöhung der Bevölkerungswachstumsrate kurz- und langfristig auf den ausgewogenen Wachstumspfad des Pro-Kopf-Einkommens?

3. Im folgenden betrachten wir das erweiterte Solow-Modell mit Humankapital nach dem Mincer-Ansatz. Die Produktionsfunktion lautet $Y = K^{\alpha}(AH)^{1-\alpha}$ mit $H = e^{\psi \cdot u} L$.

   (a) Erklären Sie, wie der Parameter ψ interpretiert wird. In welchem Bereich sollte ψ, basierend auf empirischen Ergebnissen, ungefähr liegen?

(b) Definieren Sie Variablen in Einheiten pro effektivem, gelernten Arbeiter, z.B. $\tilde{k} = \frac{K}{AhL}$. Leiten Sie damit die Wachstumsrate von $\tilde{k}$ her. Leiten Sie anschließend die Bewegungsgleichung von $\tilde{k}$ her, indem Sie $\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$, $\frac{\dot{A}}{A} = g$, $\frac{\dot{h}}{h} = 0$ und $\frac{\dot{L}}{L} = n$ benutzen.

(c) Was ist der Steady State von $\tilde{k}$? Leiten Sie darauf basierend einen Ausdruck für den Pro-Kopf-Output y^* auf dem ausgewogenen Wachstumspfad her. Um wieviel steigt y^* wenn die Anzahl der Bildungseinheiten (Schuljahre) u steigt?

(d) Gehen Sie davon aus, dass sich die Wirtschaft auf dem ausgewogenen Wachstumspfad befindet. Nehmen Sie folgende Werte an: $s = 0.3$, $\delta = 0.03$, $n = 0.01$, $g = 0.02$, $\alpha = 0.5$, $u = 10$, $A_0 = 5$. Welchen Wert hat der Pro-Kopf-Output im Jahr $t = 10$, wenn (i) $\psi = 0$, (ii) $\psi = 0.1$ und (iii) $\psi = 0.2$ ist? Erklären Sie die Unterschiede.

4. Betrachten Sie das Modell von Mankiw, Romer und Weil, in dem sowohl ungelernte Arbeit L als auch Humankapital H in der Produktionsfunktion vorkommen:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta} \tag{3}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ sowie $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$. Es gibt eine Kapitalakkumulationsgleichung für physisches Kapital und eine für Humankapital:

$$\dot{K} = s_k \cdot Y - \delta_k \cdot K \tag{4}$$

$$\dot{H} = s_h \cdot Y - \delta_h \cdot H, \tag{5}$$

wobei s_k und s_h die Anteile des Outputs sind, die jeweils in physisches und Humankapital investiert werden, δ_k und δ_h die Anteile, die abgeschrieben werden.

(a) Wie unterscheiden sich die Annahmen zur Humankapitalakkumulation in diesem Modell vom Solow-Modell mit Humankapital nach dem Mincer-Ansatz? Vergleichen Sie auch den Ausdruck für den Pro-Kopf-Output y^*

$$y^* = A \cdot \left[\left(\frac{s_k}{\delta + g + n} \right)^{\alpha} \left(\frac{s_h}{\delta + g + n} \right)^{\beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \tag{6}$$

mit dem entsprechenden Ausdruck aus dem Solow-Modell mit Humankapital nach dem Mincer-Ansatz (aus der Vorlesung sowie Aufgabe 3).

(b) Zeigen Sie, dass die Grenzerträge des Humankapitals pro effektivem Arbeiter $\tilde{h}$ im Mankiw-Romer-Weil-Modell abnehmend sind. Gilt das auch für das Solow-Modell mit Humankapital nach dem Mincer-Ansatz?