Übungsblatt 2

Wachstum, Verteilung, Nachhaltigkeit WS 2026/27

Prof. Melanie Krause, Ph.D.

Dieses Übungsblatt wird am Dienstag, den 3. November 2026, besprochen.

1. Laut den Penn World Tables betrug im Jahr 1970 das Pro-Kopf-Einkommen in China 675 USD und das in den USA 28189 USD. Bis zum Jahr 2023 ist das Pro-Kopf-Einkommen in China auf 21503 USD und das in den USA auf 74653 USD gestiegen.

   (a) Berechnen Sie die durchschnittlichen jährlichen Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens in China und den USA.

   (b) Ein Analyst schreibt: *"Das Pro-Kopf-Einkommen ist in China zwischen 1970 und 2023 insgesamt um* $\frac{21503-675}{675} = 3085.62\%$ *gestiegen, was einer jährlichen Wachstumsrate von* $\frac{3085.62\%}{53} = 58.22\%$ *entspricht."* Was sagen Sie zu dieser Berechnung? Warum ist Ihre jährliche Wachstumsrate aus (a) deutlich niedriger?

   (c) Unter der Annahme, das Pro-Kopf-Einkommen in China und den USA würde in den kommenden Jahren mit den unter (a) berechneten Wachstumsraten weiterwachsen - wann wird China die USA eingeholt und das gleiche Pro-Kopf-Einkommen haben?

   (d) Um wieviel Prozent müsste China von 2023 an wachsen, um bereits im Jahr 2040 das gleiche Pro-Kopf-Einkommen wie die USA zu haben (unter der Annahme, die USA wachsen mit der gleichen Rate wie bisher)?

2. Welche Rolle spielt es für die Güte der Approximation zwischen diskreten und kontinuierlichen Wachstumsraten

$$ln(Y_t) - ln(Y_{t-1}) \approx \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}, \tag{1}$$

   ob ein Einkommen von 200 Euro auf 201, 205, 250 oder 198 Euro gestiegen/gesunken ist? Warum ist das so? (Geben Sie dazu die Wachstumsraten als Prozentzahlen mit 4 Nachkommastellen an.)

3. Mathematische Wiederholungsaufgaben zur Wiederholung wichtiger Ableitungsregeln: Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab (a und b sind positive Parameter):

   (a)

$$f(x) = x \cdot ln(2x^3 + \sqrt{x}) \tag{2}$$

(b)

$$g(x) = \frac{x^2}{e^{a \cdot x}} \tag{3}$$

(c)

$$h(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \tag{4}$$

4. Gegeben sei die folgende (Produktions-)Funktion Y mit Input-Faktoren X, U und V sowie konstanten positiven Parametern α und β:

$$Y = X^{\alpha} \cdot \left(\frac{U}{V}\right)^{\beta} \tag{5}$$

   (a) Was ist die Wachstumsrate von Y, gegeben die Wachstumsraten von X, U und V?

   (b) Wie wirkt sich eine Verdopplung der Wachstumsrate von U auf die Wachstumsrate von Y aus?

5. Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Produktionsfunktion des Pro-Kopf-Outputs $y = k^{0.5}$, der Sparquote $s = 0.25$ sowie der Abschreibungsrate $\delta = 0.05$ beschrieben werden. Die Veränderung des Kapitals pro Kopf über die Zeit folgt $\dot{k} = s \cdot y - \delta \cdot k$.

   (a) Leiten Sie her, wo der Steady State des Kapitals pro Kopf k und des Pro-Kopf-Outputs y liegt. Mit welchen Raten wachsen k und y im Steady State?

   (b) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle der Entwicklung der Volkswirtschaft in den Jahren 2 bis 8 (in diskreter Zeit, Angaben auf vier Nachkommastellen), beginnend mit einem Pro-Kopf-Kapitalstock von $k = 16$. Sie können z.B. ein Excel-Sheet verwenden. Was passiert mit den Wachstumsraten des Pro-Kopf-Outputs bei Annäherung an den Steady State?

t	k	y	$s \cdot y$	δk	Δk	$ln(y_t) - ln(y_{t-1})$
1	16	4	1	0.8	0.2	-
2	16.2	4.0249				0.62%
3						
...						
8						

6. Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Produktionsfunktion des Pro-Kopf-Outputs $y = k^\alpha$, der Sparquote s sowie der Abschreibungsrate δ beschrieben werden. Die Veränderung des Kapitals pro Kopf über die Zeit folgt $\dot{k} = s \cdot y - \delta \cdot k$.

   (a) Wo liegen der Steady State des Kapitals pro Kopf k und des Pro-Kopf-Outputs y? Mit welchen Raten wachsen k und y im Steady State?

   (b) Im Land Tropicana regnet es soviel, dass zu jeder Zeit ein recht großer Anteil des Pro-Kopf-Kapitalstocks verrostet und abgeschrieben werden muss. Die Abschreibungsrate im Land Sahara ist viel geringer. Nehmen Sie an, beide Länder seien ansonsten identisch und können durch das einfache Solow-Modell beschrieben werden. Zeigen Sie graphisch und analytisch, welches der beiden Länder den höheren Steady State an Kapital pro Kopf und Output pro Kopf hat.

7. Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $y = k^\alpha$ mit $\alpha = 0.6$, Sparquote $s = 0.4$ und Abschreibungsrate $\delta = 0.1$ beschrieben werden. Die Volkswirtschaft befindet sich im Steady State.

   (a) Wie hoch ist der Pro-Kopf-Konsum des Landes?

   (b) Angenommen, die Regierung könne den Individuen Anreize bieten die Sparquote dahingehend zu ändern, dass der langfristige Pro-Kopf-Konsum maximiert wird. Welche Sparquote sollte sie anvisieren? Welche Auswirkungen hat das auf das Wachstum des Pro-Kopf-Outputs?

8. Im Land A wächst der gesamte Output Y mit einer jährlichen Rate von 6%, die Bevölkerung wächst ebenfalls mit der Rate von 6%. Im Land B wächst der Output Y mit einer jährlichen Rate von 4%, die Bevölkerung wächst mit der Rate von 3%. In welchem Land wächst der Pro-Kopf-Output mehr? Worauf ist dieses Wachstum laut Solow-Modell zurückzuführen, wenn das Land auf dem ausgewogenen Wachstumspfad ist?