Besprechung von Übungsblatt 2

Wachstum, Verteilung, Nachhaltigkeit

Prof. Melanie Krause, Ph.D.

WS 2026/27

Aufgabe 1

Laut den Penn World Tables betrug im Jahr 1970 das Pro-Kopf-Einkommen in China 675 USD und das in den USA 28189 USD. Bis zum Jahr 2023 ist das Pro-Kopf-Einkommen in China auf 21503 USD und das in den USA auf 74653 USD gestiegen.

a. Berechnen Sie die durchschnittlichen jährlichen Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens in China und den USA.

b. Ein Analyst schreibt: *"Das Pro-Kopf-Einkommen ist in China zwischen 1970 und 2023 insgesamt um* $\frac{21503-675}{675} = 3085.62\%$ *gestiegen, was einer jährlichen Wachstumsrate von* $\frac{3085.62\%}{53} = 58.22\%$ *entspricht."* Was sagen Sie zu dieser Berechnung? Warum ist Ihre jährliche Wachstumsrate aus (a) deutlich niedriger?

c. Unter der Annahme, das Pro-Kopf-Einkommen in China und den USA würde in den kommenden Jahren mit den unter (a) berechneten Wachstumsraten weiterwachsen - wann wird China die USA eingeholt und das gleiche Pro-Kopf-Einkommen haben?

d. Um wieviel Prozent müsste China von 2023 an wachsen, um bereits im Jahr 2040 das gleiche Pro-Kopf-Einkommen wie die USA zu haben (unter der Annahme, die USA wachsen mit der gleichen Rate wie bisher)?

Aufgabe 1

(a) Für die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate g zwischen 1970 und 2023 gilt:

$$y_{1970} \cdot (1+g)^{53} = y_{2023} \tag{1}$$

$$(1+g)^{53} = \frac{y_{2023}}{y_{1970}} \tag{2}$$

$$1+g = \left(\frac{y_{2023}}{y_{1970}}\right)^{\frac{1}{53}} \tag{3}$$

$$g = \left(\frac{y_{2023}}{y_{1970}}\right)^{\frac{1}{53}} - 1 \tag{4}$$

Für China und die USA ergibt sich also:

$$g_{China} = \left(\frac{21503}{675}\right)^{\frac{1}{53}} - 1 = 6.74\% \tag{5}$$

$$g_{USA} = \left(\frac{74653}{28189}\right)^{\frac{1}{53}} - 1 = 1.85\% \tag{6}$$

Aufgabe 1

- (b) Das Gesamtwachstum des chinesischen Pro-Kopf-Einkommens zwischen 1970 und 2023 von $\frac{21503-675}{675} = 3085.62\%$ ist korrekt.
- Um daraus jedoch die jährliche Wachstumsrate zu berechnen, muss das geometrische und nicht das arithmetische Mittel genommen werden, denn es geht um Wachstumsraten, also relative Werte:

$$\begin{aligned} g &= (1+3085.62\%)^{\frac{1}{53}} - 1 = 31.8562^{\frac{1}{53}} - 1 = 6.74\% \\ &\neq \frac{3085.62\%}{53} = 58.22\% \end{aligned} \tag{7}$$

- Die falsche jährliche Wachstumsrate des Analysten ist zu hoch: Das arithmetische Mittel berücksichtigt nicht, dass sich die Wachstumsraten im Laufe der Jahre auf höhere Einkommensniveaus beziehen. So sind jährliche Zuwächse von 58.22% *des Anfangsniveaus* (675 USD) nötig, um 2023 den gegebenen Endwert zu erreichen. Da sich das Niveau aber jedes Jahr erhöht, muss die Wirtschaft dafür jährlich 'nur' um 6.74% *des jeweiligen aktuellen Niveaus* wachsen.

Aufgabe 1

(c) Gesucht: Das Jahr $2023 + T$, in dem das Pro-Kopf-Einkommens Chinas das der USA eingeholt hat (gegeben $g_{China} = 6.74\%$ sowie $g_{USA} = 1.85\%$)

$$y_{2023}^{China} \cdot (1 + g_{China})^T = y_{2023}^{USA} \cdot (1 + g_{USA})^T \tag{8}$$

$$\left(\frac{1 + g_{China}}{1 + g_{USA}}\right)^T = \frac{y_{2023}^{USA}}{y_{2023}^{China}} \tag{9}$$

$$T \cdot ln\left(\frac{1 + g_{China}}{1 + g_{USA}}\right) = ln\left(\frac{y_{2023}^{USA}}{y_{2023}^{China}}\right) \tag{10}$$

$$T = \frac{ln\left(\frac{y_{\mathbf{2023}}^{USA}}{y_{\mathbf{2023}}^{China}}\right)}{ln\left(\frac{1+g_{China}}{1+g_{USA}}\right)} \tag{11}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{74653}{21503}\right)}{ln\left(\frac{1+0.0674}{1+0.0185}\right)} = 26.54 \tag{12}$$

Unter diesen Annahmen würde China im Laufe des Jahres $2023 + 26 = 2049$ das gleiche Pro-Kopf-Einkommen wie die USA erreichen.

Aufgabe 1

(d) Gesucht: g_{China}, damit China bereits im Jahr 2040 (also 17 Jahre nach 2023) das gleiche Pro-Kopf-Einkommen wie die USA hat, gegeben $g_{USA} = 1.85\%$

$$y_{2023}^{China} \cdot (1 + g_{China})^{17} = y_{2023}^{USA} \cdot (1 + g_{USA})^{17} \tag{13}$$

$$(1 + g_{China})^{17} = \frac{y_{2023}^{USA}}{y_{2023}^{China}} \cdot (1 + g_{USA})^{17} \tag{14}$$

$$g_{China} = \left(\frac{y_{2023}^{USA}}{y_{2023}^{China}}\right)^{\frac{1}{17}} \cdot (1 + g_{USA}) - 1 \tag{15}$$

$$= \left(\frac{74653}{21503}\right)^{\frac{1}{17}} \cdot (1 + 0.0185) - 1 \tag{16}$$

$$= 9.58\% \tag{17}$$

Unter den gegebenen Annahmen müsste China jährlich statt mit 6.74% mit 9.58% wachsen, um bis zum Jahr 2040 das gleiche Pro-Kopf-Einkommen wie die USA zu haben.

Aufgabe 2

Welche Rolle spielt es für die Güte der Approximation zwischen diskreten und kontinuierlichen Wachstumsraten

$$ln(Y_t) - ln(Y_{t-1}) \approx \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}, \tag{18}$$

ob ein Einkommen von 200 Euro auf 201, 205, 250 oder 198 Euro gestiegen/gesunken ist? Warum ist das so? (Geben Sie dazu die Wachstumsraten als Prozentzahl mit 4 Nachkommastellen an.)

Aufgabe 2

Von 200 auf...	$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$	$ln(Y_t) - ln(Y_{t-1})$	Absolute Differenz
201	$\frac{201-200}{200} = 0.5000\%$	$ln(201) - ln(200) = 0.4988\%$	0.0012 %
205	$\frac{205-200}{200} = 2.5000\%$	$ln(205) - ln(200) = 2.4693\%$	0.0307 %
250	$\frac{250-200}{200} = 25.0000\%$	$ln(250) - ln(200) = 22.3144\%$	2.6966 %
198	$\frac{198-200}{200} = -1.0000\%$	$ln(198) - ln(200) = -1.0050\%$	0.0050 %

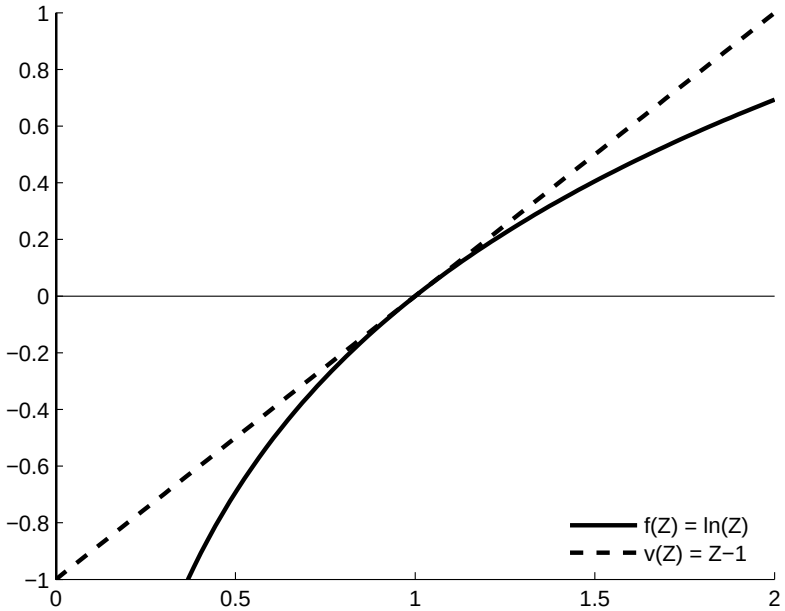
Aufgabe 2

Je kleiner die Wachstumsraten desto besser die Approximation

$$ln(Y_t) - ln(Y_{t-1}) \approx \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} \tag{19}$$

Mathematisch handelt es sich um eine Taylor-Approximation um den Punkt $\frac{Y_t}{Y_{t-1}}$:

$$ln(z) \approx z - 1 \quad \text{für } z \text{ nahe bei } 1 \tag{20}$$



Aufgabe 2

- Intuitive Erklärung:
  - Bei kleinen Wachstumsraten sind die Unterschiede zwischen diskretem und kontinuierlichem Wachstum geringer, denn der Kapitalisierungseffekt (kontinuierlich neue Zwischenstände) fällt weniger ins Gewicht. Die Zwischenstände unterscheiden sich weniger voneinander.
  - Aus finanzwissenschaftlicher Sicht: Bei niedrigem Zinsniveau verliert der Zinseszinseffekt an Bedeutung.
- Ebenfalls sind die Unterschiede zwischen diskretem und kontinuierlichem Wachstum geringer je kleiner das betrachtete Zeitinvall.

Aufgabe 3

Mathematische Wiederholungsaufgaben zur Wiederholung wichtiger Ableitungsregeln: Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab (a und b sind positive Parameter):

a

$$f(x) = x \cdot ln(2x^3 + \sqrt{x}) \tag{21}$$

b

$$g(x) = \frac{x^2}{e^{a \cdot x}} \tag{22}$$

c

$$h(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \tag{23}$$

Aufgabe 3

Wichtige Ableitungsregeln:

- Ableitung von Potenzen ($p \in \Re$):

$$f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = p \cdot x^{p-1} \tag{24}$$

- Ableitung des Logarithmus:

$$f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \tag{25}$$

- Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{26}$$

- Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \tag{27}$$

- Kettenregel:

$$f(x) = u\,[v(x)] \Rightarrow f'(x) = u'\,[v(x)] \cdot v'(x) \tag{28}$$

Aufgabe 3

(a)

$$f(x) = x \cdot ln(2x^3 + \sqrt{x}) \tag{29}$$

$$f'(x) = 1 \cdot ln(2x^3 + \sqrt{x}) + x \cdot \frac{1}{2x^3 + \sqrt{x}} \cdot \left(6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \tag{30}$$

$$= ln(2x^3 + \sqrt{x}) + \frac{6x^3 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{2x^3 + \sqrt{x}} \tag{31}$$

(b)

$$g(x) = \frac{x^2}{e^{a \cdot x}} \tag{32}$$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot e^{a \cdot x} - x^2 \cdot a \cdot e^{a \cdot x}}{e^{2a \cdot x}} \tag{33}$$

$$= \frac{2x - x^2 \cdot a}{e^{a \cdot x}} \tag{34}$$

Aufgabe 3

(c)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} && (35)\\
h'(x) &= -e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \cdot \left(-b \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}\right) \cdot \frac{1}{a} && (36)\\
&= \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} && (37)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende (Produktions-)Funktion Y mit Input-Faktoren X, U und V sowie konstanten positiven Parametern α und β:

$$Y = X^{\alpha} \cdot \left(\frac{U}{V}\right)^{\beta} \tag{38}$$

a. Was ist die Wachstumsrate von Y, gegeben die Wachstumsraten von X, U und V?

b. Wie wirkt sich eine Verdopplung der Wachstumsrate von U auf die Wachstumsrate von Y aus?

Aufgabe 4

(a)

$$Y = X^{\alpha} \cdot \left(\frac{U}{V}\right)^{\beta} \tag{39}$$

Berechnung von Wachstumsraten: Logarithmieren...

$$\begin{aligned} ln(Y) &= ln\left(X^{\alpha} \cdot \left(\frac{U}{V}\right)^{\beta}\right) && (40)\\ ln(Y) &= ln(X^{\alpha}) + ln(U^{\beta}) - ln(V^{\beta}) && (41)\\ ln(Y) &= \alpha \cdot ln(X) + \beta \cdot (ln(U) - ln(V)) && (42) \end{aligned}$$

... und nach der Zeit ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial ln(Y)}{\partial t} &= \alpha \cdot \frac{\partial ln(X)}{\partial t} + \beta \cdot \left(\frac{\partial ln(U)}{\partial t} - \frac{\partial ln(V)}{\partial t}\right) && (43)\\ \frac{\dot{Y}}{Y} &= \alpha \cdot \frac{\dot{X}}{X} + \beta \cdot \left(\frac{\dot{U}}{U} - \frac{\dot{V}}{V}\right) && (44) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(b)

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \cdot \frac{\dot{X}}{X} + \beta \cdot \left(\frac{\dot{U}}{U} - \frac{\dot{V}}{V}\right) \tag{45}$$

Erhöht sich die Wachstumsrate von U um den Faktor 2, erhöht sich die Wachstumsrate von Y um den Faktor $2 \cdot \beta$, denn:

$$\frac{\partial \frac{\dot{Y}}{Y}}{\partial \frac{\dot{U}}{U}} = \beta \tag{46}$$

Aufgabe 5

Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Produktionsfunktion des Pro-Kopf-Outputs $y = k^{0.5}$, der Sparquote $s = 0.25$ sowie der Abschreibungsrate $\delta = 0.05$ beschrieben werden. Die Veränderung des Kapitals pro Kopf über die Zeit folgt $\dot{k} = s \cdot y - \delta \cdot k$.

a. Wo liegt der Steady State des Kapitals pro Kopf k und des Pro-Kopf-Outputs y? Mit welchen Raten wachsen k und y im Steady State?

b. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle der Entwicklung der Volkswirtschaft in den Jahren 2 bis 8 (in diskreter Zeit, Angaben auf vier Nachkommastellen), beginnend mit einem Pro-Kopf-Kapitalstock von $k = 16$. Sie können z.B. ein Excel-Sheet verwenden. Was passiert mit den Wachstumsraten des Pro-Kopf-Outputs bei Annäherung an den Steady State?

t	k	y	$s \cdot y$	δk	Δk	$ln(y_t) - ln(y_{t-1})$
1	16	4	1	0.8	0.2	-
2	16.2	4.0249				0.62%
3						
...						
8						

Aufgabe 5

(a) Im Steady State gilt:

$$\dot{k} \stackrel{!}{=} 0 = s \cdot y - \delta \cdot k \tag{47}$$

$$\delta k = s k^{\alpha} \tag{48}$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta} \tag{49}$$

$$k^{*} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{50}$$

Aufgabe 5

Mit $\alpha = 0.5$, $s = 0.25$ und $\delta = 0.05$ ergibt sich:

$$k^* = \left(\frac{0.25}{0.05}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} = \underline{\underline{25}} \tag{51}$$

$$y^* = (k^*)^{\alpha} = 25^{0.5} = \underline{\underline{5}} \tag{52}$$

- Im Steady State beträgt das Kapital pro Kopf 25, der Output pro Kopf 5. Per Definition ist k im Steady State konstant und als Funktion davon auch y.
- $\Longrightarrow$ Die Wachstumsraten von k und y im Steady State betragen 0.

Aufgabe 5

(b) Vervollständigung der Tabelle mit Hilfe folgender Zusammenhänge:

$$k_t = k_{t-1} + \Delta k_{t-1} \tag{53}$$
$$y = k^{0.5} \tag{54}$$
$$s \cdot y = 0.25 \cdot y \tag{55}$$
$$\delta \cdot k = 0.05 \cdot k \tag{56}$$
$$\Delta k = s \cdot y - \delta \cdot k \tag{57}$$

Aufgabe 5

t	k	y	$s \cdot y$	δk	Δk	$ln(y_t) - ln(y_{t-1})$
1	16.0000	4.0000	1.0000	0.8000	0.2000	-
2	16.2000	4.0249	1.0062	0.8100	0.1962	0.62%
3	16.3962	4.0492	1.0123	0.8198	0.1925	0.60%
4	16.5887	4.0729	1.0182	0.8294	0.1888	0.58%
5	16.7775	4.0960	1.0240	0.8389	0.1851	0.57%
6	16.9627	4.1186	1.0296	0.8481	0.1815	0.55%
7	17.1442	4.1406	1.0351	0.8572	0.1779	0.53%
8	17.3221	4.1620	1.0405	0.8661	0.1744	0.52%

Der Pro-Kopf-Kapitalstock wächst hin zum Steady State von $k^* = 25$, gleichzeitig wächst das Pro-Kopf-Output. Allerdings nehmen die Wachstumsraten mit Annäherung an den Steady State ab.

Aufgabe 6

Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Produktionsfunktion des Pro-Kopf-Outputs $y = k^{\alpha}$, der Sparquote s sowie der Abschreibungsrate δ beschrieben werden. Die Veränderung des Kapitals pro Kopf über die Zeit folgt $\dot{k} = s \cdot y - \delta \cdot k$.

a. Wo liegen der Steady State des Kapitals pro Kopf k und des Pro-Kopf-Outputs y? Mit welchen Raten wachsen k und y im Steady State?

b. Im Land Tropicana regnet es soviel, dass zu jeder Zeit ein recht großer Anteil des Pro-Kopf-Kapitalstocks verrostet und abgeschrieben werden muss. Die Abschreibungsrate im Land Sahara ist viel geringer. Nehmen Sie an, beide Länder seien ansonsten identisch und können durch das einfache Solow-Modell beschrieben werden. Zeigen Sie graphisch und analytisch, welches der beiden Länder den höheren Steady State an Kapital pro Kopf und Output pro Kopf hat.

Aufgabe 6

(a) Im Steady State gilt:

$$\dot{k} \stackrel{!}{=} 0 = s \cdot y - \delta \cdot k \tag{58}$$

$$\delta k = s k^{\alpha} \tag{59}$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta} \tag{60}$$

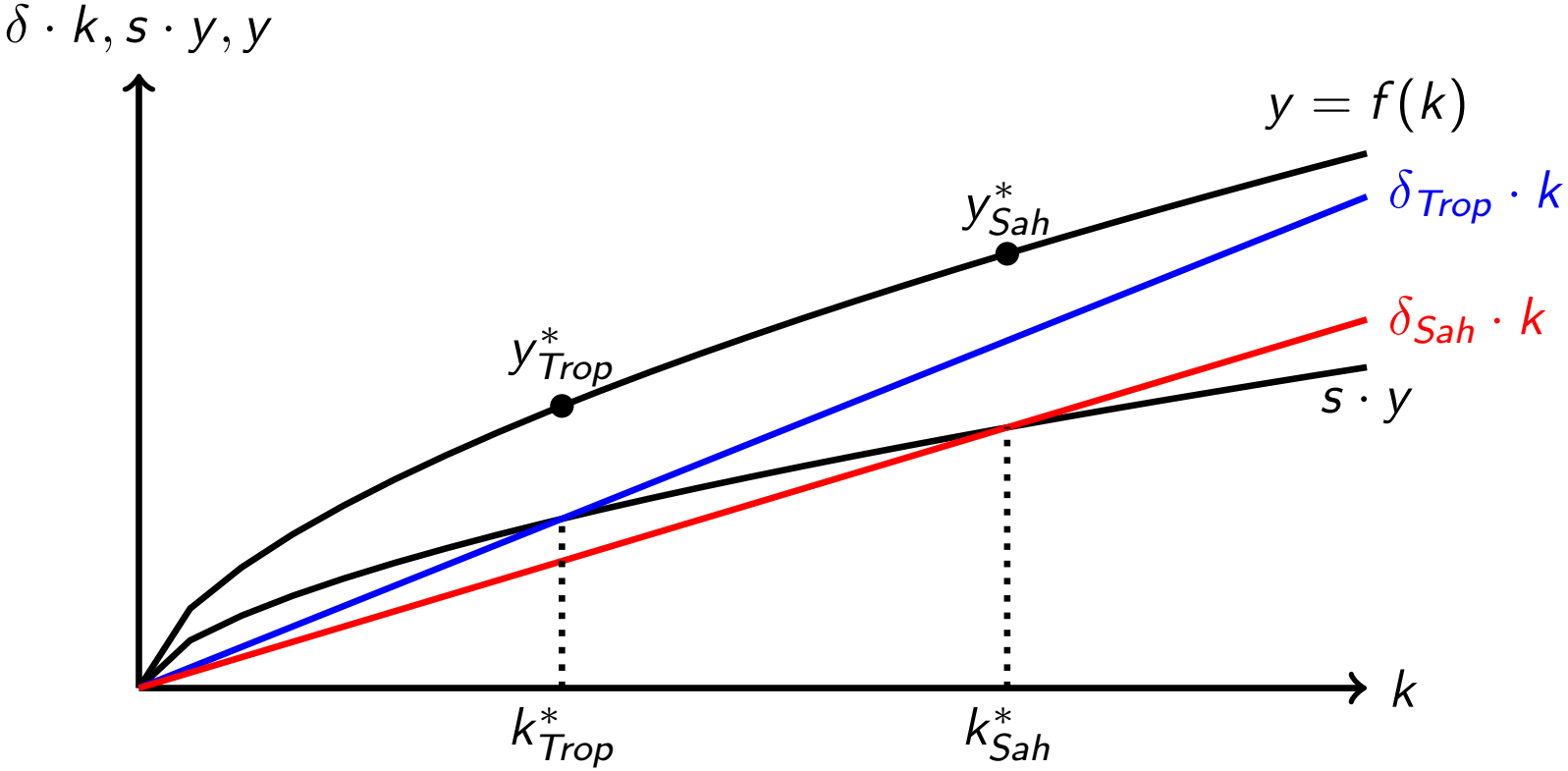
$$k^* = \underline{\underline{\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}} \tag{61}$$

$$y^* = (k^*)^{\alpha} = \underline{\underline{\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}} \tag{62}$$

Per Definition ist k im Steady State konstant und als Funktion davon auch y. $\Longrightarrow$ Die Wachstumsraten von k und y im Steady State betragen 0.

Aufgabe 6

(b) Graphische Lösung: Land Tropicana mit höherem δ hat eine steilere Abschreibungsgerade, die die Investitionskurve auf einem niedrigeren Niveau schneidet. $\Longrightarrow$ Niedrigerer Steady State an Kapital pro Kopf und (als Funktion davon) Output pro Kopf als Land Sahara:



Aufgabe 6

Analytische Lösung: Der Steady State (hergeleitet in Aufgabenteil (a))

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{63}$$

hängt negativ von der Abschreibungsrate δ ab:

$$\frac{\partial \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\partial \delta} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \left(-\frac{s}{\delta^2}\right) < 0 \tag{64}$$

Je höher δ, desto geringer der Steady State. Deshalb hat Tropicana einen niedrigeren Steady State an Kapital pro Kopf und (als Funktion davon) einen niedrigeren Output pro Kopf als Sahara.

Aufgabe 7

Nehmen Sie an, eine Volkswirtschaft könne durch das einfache Solow-Modell mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $y = k^{\alpha}$ mit $\alpha = 0.6$, Sparquote $s = 0.4$ und Abschreibungsrate $\delta = 0.1$ beschrieben werden. Die Volkswirtschaft befindet sich im Steady State.

a. Wie hoch ist der Pro-Kopf-Konsum des Landes?

b. Angenommen, die Regierung könne den Individuen Anreize bieten, die Sparquote dahingehend zu ändern, dass der langfristige Pro-Kopf-Konsum maximiert wird. Welche Sparquote sollte sie anvisieren? Welche Auswirkungen hat das auf das Wachstum des Pro-Kopf-Outputs?

Aufgabe 7

Um den Pro-Kopf-Konsum im Steady State zu berechnen, benötigen wir den Pro-Kopf-Kapitalstock im Steady State (hergeleitet in Aufgabe 5):

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.4}{0.1}\right)^{\frac{1}{1-0.6}} = 32 \tag{65}$$

Der Pro-Kopf-Output beträgt also

$$y^* = (k^*)^{0.6} = 8 \tag{66}$$

und für den Pro-Kopf-Konsum erhält man

$$c^* = y^* - s \cdot y^* = (1-s) \cdot y^* = 4.8. \tag{67}$$

Aufgabe 7

(b)

- Welche Sparquote maximiert den Pro-Kopf-Konsum? Die Sparquote der Goldenen Regel!
- Maximiere

$$c^* = k^\alpha - s \cdot y = k^\alpha - \delta \cdot k \tag{68}$$

- Ableitung nach s:

$$\frac{\partial c^*(k)}{\partial s} \stackrel{!}{=} 0 \tag{69}$$

$$\iff \quad \frac{\partial c^*(k)}{\partial k^*} \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} = 0 \iff \quad \left(\alpha k^{\alpha-1} - \delta\right) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} = 0 \tag{70}$$

- Da $\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0$, muss gelten: $\alpha k^{\alpha-1} = \delta$

Aufgabe 7

Welche Sparrate erfüllt

$$\alpha k^{\alpha-1} = \delta \quad ? \tag{71}$$

Ersetze k durch seinen Steady-State-Ausdruck, der s enthält: $k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, so dass

$$\alpha \left(\frac{s_{golden}}{\delta}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} = \delta \tag{72}$$

$$\alpha \left(\frac{s_{golden}}{\delta}\right)^{-1} = \delta \tag{73}$$

$$\alpha \left(\frac{\delta}{s_{golden}}\right) = \delta \tag{74}$$

$$s_{golden} = \alpha \tag{75}$$

Aufgabe 7

- In der Volkswirtschaft mit $\alpha = 0.6$ führt die aktuelle Sparquote von $s = 0.4$ nicht zum maximalen Konsum.
- Die Regierung sollte eine Sparquote von $s_{golden} = \alpha = 0.6$ anvisieren. Neuer Steady State:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.6}{0.1}\right)^{\frac{1}{1-0.6}} = 88.18 \quad (76)$$

$$y^* = (k^*)^{0.6} = 14.70 \quad (77)$$

$$c^* = y^* - s \cdot y^* = (1-s) \cdot y^* \quad (78)$$

$$= (1-0.6) \cdot 14.70 = 5.88 > 4.8 \quad (79)$$

- Um ausgehend von $k_1^* = 32$ den neuen Steady State von $k_2^* = 88.18$ zu erreichen, muss der Pro-Kopf-Kapitalstock wachsen. Auch der Pro-Kopf-Output verzeichnet in dieser Übergangszeit positive Wachstumsraten. Ist der neue Steady State erreicht, sind beide Wachstumsraten wieder 0.

Aufgabe 8

Im Land A wächst der gesamte Output Y mit einer jährlichen Rate von 6%, die Bevölkerung wächst ebenfalls mit der Rate von 6%. Im Land B wächst der Output Y mit einer jährlichen Rate von 4%, die Bevölkerung wächst mit der Rate von 3%. In welchem Land wächst der Pro-Kopf-Output mehr? Worauf ist dieses Wachstum laut Solow-Modell zurückzuführen, wenn das Land auf dem ausgewogenen Wachstumspfad ist?

Aufgabe 8

- Für jedes Land haben wir die Wachstumrate $\frac{\dot{Y}}{Y}$ gegeben und suchen $\frac{\dot{y}}{y}$.
- Umrechnung zwischen Y und y:

$$Y = L \cdot y \tag{80}$$

- Die Wachstumrate erhalten wir durch... Logarithmieren und nach der Zeit ableiten

$$\frac{\partial ln(Y)}{\partial t} = \frac{\partial ln(L)}{\partial t} + \frac{\partial ln(y)}{\partial t} \tag{81}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{y}}{y} \tag{82}$$

- Das heißt: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}$.
- Der Pro-Kopf-Output in Land A wächst mit 6%-6% = 0, der Pro-Kopf-Output in Land B wächst mit 4%-3% = 1%.

Aufgabe 8

- Um die Quelle des Pro-Kopf-Wachstums zu finden, schreiben wir y wie im Solow-Modell um:

$$y = A \cdot \tilde{y} = A \cdot \tilde{k}^{\alpha} \tag{83}$$

- Die Wachstumrate erhalten wir durch... Logarithmieren und nach der Zeit ableiten

$$\frac{\partial ln(y)}{\partial t} = \frac{\partial ln(A)}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial ln(\tilde{k})}{\partial t} \tag{84}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \cdot \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} \tag{85}$$

- Da wir auf dem ausgewogenen Wachstumspfad sind, wächst der Kapitalstock $\tilde{k}$ pro effektivem Arbeiter nicht. $\Longrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = 0$.
- Es gilt: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A}$. Das 1% Wachstum des Pro-Kopf-Outputs im Land B ist auf ein Wachstum des technologischen Fortschritts von 1% zurückzuführen.